

Klassieke zelfinductieberekeningen voor éénlaags spoelen.

E.H. Dooijes / 10 januari 2010, herzien 22 juni 2013

Op het internet en in de technische literatuur zijn heel wat methoden te vinden om de zelfinductie van een spoel te berekenen, of om een spoel te ontwerpen met een gegeven zelfinductie. Vaak gaat het dan om benaderingsformules, die altijd een beperkte geldigheidsgebied hebben (alleen geldig voor korte, of juist alleen voor lange spoelen bijvoorbeeld). Vaak wordt dit geldigheidsbereik niet of niet correct aangegeven. En wat te doen als onze toepassing buiten het geldigheidsgebied van een gevonden formule valt? En waar komen al deze benaderingsformules vandaan?

Om hier iets over te kunnen zeggen moeten we ver in de geschiedenis teruggaan. De theoretische grondslagen voor de berekening van de coefficient van zelfinductie (door iedereen kortweg zelfinductie genoemd) zijn gelegd door de vermaarde fysicus James Clark Maxwell en anderen rond 1850.

De interesse van Maxwell voor de coefficient van zelfinductie had uiteraard niets te maken met radiotechniek. Nauwkeurige kennis van inductieverschijnselen was nodig om de kwantitatieve relatie tussen de aanvankelijk nog los van elkaar bestaande electrostatische en electromagnetische eenhedenstelsels vast te stellen. Bij de laboratoriumproeven werd gelijkstroom gebruikt; het bij onderbreking daarvan optredende van de zelfinductie afhankelijke effect werd gemeten met een ballistische (integrerende) galvanometer.

Een aantal belangrijke publicaties over het berekenen van zelfinductie vinden we in het Bulletin of the National Bureau of Standards, in het bijzonder in een reeks artikelen van E.B. Rosa en F.W. Grover [1]. In navolging van deze auteurs gebruik ik hier een systeem van eenheden waarin alles in cm wordt gemeten: niet alleen de geometrie van de spoelen in kwestie maar ook de zelfinductie. Omrekenen naar hedendaagse eenheden (meter, henry) is heel gemakkelijk omdat een zelfinductie van 1 cm *exact* overeenkomt met 1 nanohenry. Zelfinductie is in feite een geometrische eigenschap van een (lucht)spoel. Iets dergelijks geldt ook voor de condensator, waarvan de capaciteit ook, en om vergelijkbare redenen, in cm werd uitgedrukt [6].

We beginnen met een formule die algemeen geldig is voor het berekenen van de zelfinductie van een *current sheet* [7], dat is een wikkeling van zeer dunne geleidende strip zonder ruimte tussen de windingen - maar wel zonder dat de windingen electrisch contact met elkaar maken. Zo'n (niet in werkelijkheid te realiseren) current sheet voldoet aan de eis dat de stroom volstrekt uniform is over een axiale doorsnede van de sheet. Bij een wikkeling met ronde draad van eindige dikte is dit niet het geval, en zeker niet bij wisselstroom (skin effect!). Voorlopig gaan we uit van het 'gelijkstroom' geval. Dat is ook de enige mogelijkheid bij deze klassieke aanpak. Alleen met hedendaagse, op eindige-elementen benadering gebaseerde methoden, niet denkbaar zonder een krachtige computer, kan het elektrische gedrag van een spoel bij hoge frequenties worden voorspeld, rekening houdend met skin effect, nabijheidseffect, gedistribueerde capaciteit en 'vertraginglijn' gedrag.

De exacte formule voor een enkellaags current sheet, afkomstig van L. Lorenz [2], is als volgt:

$$L = \frac{32}{3} \frac{\pi n^2 a^3}{b^2} \left\{ \frac{2k^2 - 1}{k^3} E(k) + \frac{1 - k^2}{k^3} F(k) - 1 \right\} \quad \text{met } k = \sqrt{\frac{1}{1 + (b/2a)^2}} \quad (1)$$

waarin $E(k)$ en $F(k)$ de zogenoemde complete elliptische integralen van resp. de eerste en tweede soort zijn, met argument k . a is de straal, en b de lengte van de spoel.

Aan het eind van de 19de eeuw was men in staat complete theoretische analyses te maken van allerlei fysische problemen, maar het doorrekenen van de resulterende formules gaf vaak grote moeilijkheden - een situatie die tot de komst van de elektronische computer nauwelijks veranderd is. In het geval van formule (1) was de moeilijkheid dat E en F buitengewoon lastig te evalueren functies zijn. Destijds moest men daarvoor op tabellenboeken vertrouwen, samengesteld door mensen die er hun levenswerk van maakten om van zulke zogenoemde 'speciale functies' de numerieke waarden te bepalen.

Tegenwoordig berekent men op een laptop in no time de waarden van E en F voor elke gewenste waarde van het argument k (zie bijvoorbeeld mijn programma LorenzL [3]). Daardoor zijn de vele publicaties die in de eerste helft van de twintigste eeuw aan zelfinductie-berekeningen zijn gewijd tegenwoordig niet zo interessant meer. Het gaat in deze teksten namelijk om het vinden van rekenlineaal-fähige *benaderingen* van (1), die gevonden kunnen worden als bepaalde aannamen worden gedaan met betrekking tot de afmetingen van de spoel. Een heel bekend voorbeeld is de benaderingsformule van Wheeler [4], geldig voor $b > 0.8a$ (lange spoel):

$$L = 39.4 \frac{a^2 n^2}{b + 0.9a} \quad (2)$$

waarover straks meer. Een andere benadering is de formule van Rayleigh [8], die redelijk nauwkeurig is als $b < a$ (korte spoel):

$$L = 4\pi a n^2 \left\{ \log \frac{8a}{b} - \frac{1}{2} + \frac{b^2}{32a^2} \left(\log \frac{8a}{b} + \frac{1}{4} \right) \right\}$$

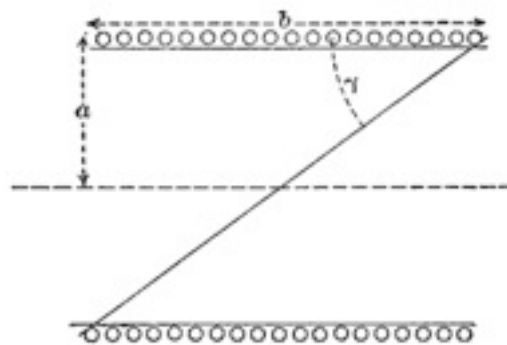
Het is mogelijk om (1) zonder verlies van algemeenheid om te schrijven in de vorm

$$L = a n^2 Q \quad (3)$$

waarbij Q een functie is van $2a/b = \tan \gamma$, waarin γ de openingshoek van de spoel is, zie de figuur. In Q zitten dan uiteraard nog steeds de elliptische integralen E en F verscholen.

Van Q als functie van γ zijn door Rosa en Grover tabellen geproduceerd. Voor $\gamma = 11.3^\circ$ tot 80° loopt Q (monotoon maar niet lineair!) van 3.6 tot 29.

Voor ons is (3) vooral nog interessant omdat deze formule enig inzicht geeft in de manier waarop L van de globale vorm van de spoel afhangt.



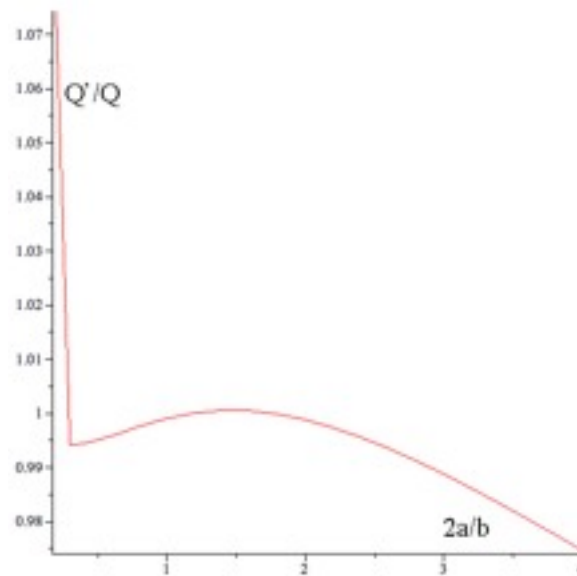
Afb. 1, in aangepaste vorm overgenomen uit [1]

Ook Wheeler's formule kan worden omgeschreven in termen van $2a/b (= \tan \gamma)$:

$$L = a n^2 \frac{19.7 \frac{2a}{b}}{1 + 0.45 \frac{2a}{b}} = a n^2 Q' \quad (4)$$

Vergelijken we waarden van Q in (3) en Q' in (4) met elkaar voor gelijke waarden van

$2a/b$, dan zien we een goede correspondentie zolang $2a/b < 2.5$ is. In afbeelding 2 is dit grafisch weergegeven door Q'/Q te plotten tegen $2a/b$. Dit klopt met de claim van Wheeler dat zijn formule binnen 1% nauwkeurig is voor $b > 0.8a$, wat neerkomt op $\gamma < 68^\circ$, ofwel de spoel mag niet te kort zijn.



Afb. 2: Fout in Wheeler benaderingsformule

In feite is de formule (2) van Wheeler een wiskundig gezien betrekkelijk voor de hand liggende benadering van (1), wat ook verklaart dat dezelfde formule door anderen al eerder gepubliceerd werd, o.m. door J. Corver in 'Het Draadloos Amateurstation' [5].

Vergelijk (2) ook met de uit 'first principles' [9] af te leiden waarde van L voor een zeer lange of toroidale spoel:

$$L = 4\pi^2 n^2 a^2 / b . \quad (4\pi^2 \approx 39.48)$$

Als we in (2) $b \gg a$ nemen, dan blijken beide formules overeen te stemmen. De verticaal stijgende tak van de grafiek heeft dan ook geen fysische betekenis; hij ontstaat doordat bij zeer kleine $2a/b$ de afrondingsfouten in de benaderingsformule de overhand gaan krijgen.

De zelfinductie van een realistische eenlaags-spoel (geen current sheet), gewikkeld van rond draad met eindige dikte, en met een zekere spatie tussen de windingen, kan worden gevonden door middel van een correctie op de current sheet formule (1), zoals gegeven door Rosa en Grover:

$$L_{reel} = L_{sheet} - 4\pi an(A + B) \quad (5)$$

A hangt af van de verhouding d/D (draaddikte/spoed), en B van het aantal windingen n .

a is nu de straal van de spoel gemeten tot het midden van de draad.

De exacte berekening van A en (vooral) B is bewerkelijk, maar de uitkomsten zijn geruststellend;

| d/D | A | n | B |
|-------|-------|------|------|
| 1 | 0.56 | 1 | 0 |
| 0.5 | -0.14 | 10 | 0.26 |
| 0.1 | -1.74 | 100 | 0.33 |
| 0.01 | -4.05 | 1000 | 0.34 |

Omdat L_{sheet} toeneemt met n^2 , en de correctieterm met n , is de laatste bij $n > 10$ te verwaarlozen voor praktische toepassingen. In de meeste benaderingsformules (waaronder die van Wheeler) is de correctie (5) niet meegenomen. Ook niet in het programma LorenzL [3].

Referenties en aantekeningen

- [1] E. B. Rosa en F. W. Grover: Formulas and Tables for the Calculation of Mutual and Self Induction [Revised], Bulletin of the Bureau of Standards, **8** (1911) no.1.
- [2] L. Lorenz: Ueber die Fortpflanzung der Electricität. Ann. Phys. Chem. **VII** (1879) 161-193.
- [3] E.H. Dooijes: Programma LorenzL. Elders op deze website.
- [4] H.A. Wheeler: Simple inductance formulas for radio coils. Proc. IRE **16** (1928) 1398-1400. In de oorspronkelijke publicatie worden inch en microhenry als eenheden gebruikt, met als resultaat $L = a^2n^2/(9a+10b)$. De ronde getallen zijn gekozen ten koste van de nauwkeurigheid en/of het geldigheidsbereik van de formule.
- [5] J. Corver: Het draadloos amateurstation voor ontvangst van telefonie en telegrafie, 4de druk 1923. Corver vermeldt niet waar hij de formule vandaan heeft.
- [6] $1 \text{ cm} \approx 1.1 \text{ pF}$ is de capaciteit van een bol met een straal van 1 cm. De omrekeningsfactor is $4\pi\epsilon_0 \times 10^{10} = 1.112..$, waarin $\epsilon_0 = 8.85.. \times 10^{-12} \text{ F/m}$ de elektrische veldconstante is. In het hier gebruikte cgs (centimeter-gram-seconde) eenhedensysteem hebben zelfinductie en capaciteit beide de *dimensie* van een lengte.
- [7] 'Current sheet' zou men in het Nederlands eventueel met 'stroomblad' kunnen vertalen.
- [8] De Rayleigh formule is ontleend aan [1]. Opmerking: met *log* wordt in dit artikel steeds de natuurlijke logaritmie (grondtal e) bedoeld.
- [9] Zie bijvoorbeeld H.B. Dorgelo en R. Ketel: Electriciteit en Magnetisme, M. Nijhoff 1959.